Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация «Тамбовский колледж социокультурных технологий»

МЕДВЕДЕВА А.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине ОУД. 03 МАТЕМАТИКА
(Методика преподавания раздела
«Тригонометрия» для студентов специальностей СПО)

Тамбов, 2021

22.151.3.268
М42

Одобрено к изданию на заседании Методического совета АНПОО ТКСКТ«30» декабря 2021г., протокол № 6.

Автор: Медведева А.В., преподаватель АНПОО «Тамбовский колледж социокультурных технологий».

Рецензент: Удалова Т.В., преподаватель информатики АПОО "Техникум экономики и предпринимательства".

Медведева, А.В.
Методическое пособие по дисциплине ОУД.03 Математика (Методика преподавания раздела «Тригонометрия» для студентов специальностей СПО).//А.В. Медведева. – Тамбов: АНПОО «Тамбовский колледж социокультурных технологий», 2021. – 23 с.

Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой конспекты лекций, являющихся дополнением к курсу. Преподавателем разработаны подробные лекции, позволяющие более подробно раскрыть раздел «Тригонометрия». Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальностей среднего профессионального образования.

© АНПОО «Тамбовский колледж социокультурных технологий», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 Знакомство с понятиями sin и cos через треугольник 4

2 Раскрытие понятия «тригонометрической окружности»..... 7

3 Язык тригонометрии: как решать тригонометрические неравенства..... 10

3.1 Задачи для самостоятельного решения..... 16

4 Формулы приведения: как научиться определять ответ без таблицы 17

4.1 Как определить знак перед конечной функцией?..... 19

4.2 Как определить меняется ли функция на кофункцию?..... 21

Список рекомендованной литературы 23

1 Знакомство с понятиями sin и cos через треугольник

Понятие о тригонометрической функции развивается еще на этапе средней школы. Однако, зачастую речь идет исключительно про: функции синуса, фундаментальном инструменте для оценки отношения сторон и острых углов прямоугольного треугольника. Поэтому понимание у студента сформировано не полностью.

Начинать занятие следует со взаимоотношения сторон треугольника и его углов. Для этого формируется ряд вопросов перед обучающимися:

- **Как изменится сторона b, если постепенно будет увеличиваться угол α?**(Сторона b станет длиннее)
- **Что произойдет с треугольником, если угол α будет равен 0°?** (Треугольник «схлопнется» в горизонтальный отрезок с длиной c)
- **Что произойдет с треугольником, если угол α будет равен 90°?**(Треугольник «схлопнется» в вертикальный отрезок, сторона bсольется со стороной c, то есть b=c).

Ответы на поставленные вопросы позволят сформировать уровень понимания у студентов. Также вопросы дают возможность втянуть студентов в процесс коллективного мышления, что позволит сосредоточить большее число обучающихся на теме занятия.

Далее следует рассмотреть простой треугольник (рисунок 1), имеющий:

- три стороны: a,b,c;
- три угла: α, β, γ;
- Сумму трех углов, равную 180°;

На треугольнике следует графически обозначить все стороны и углы, а также визуально продемонстрировать разность всех углов.

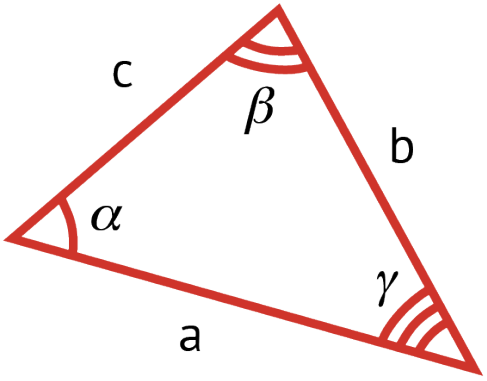

Рисунок 1 – Треугольник со сторонами a,b,c

Следом необходимо рассмотреть прямоугольный треугольник. Студентам необходимо самостоятельно определить, что является отличительной чертой обычного треугольника от прямоугольного. Также следует вспомнить, что называется «прилежащим катетом», «противолежащим катетом» и «гипотенузой».

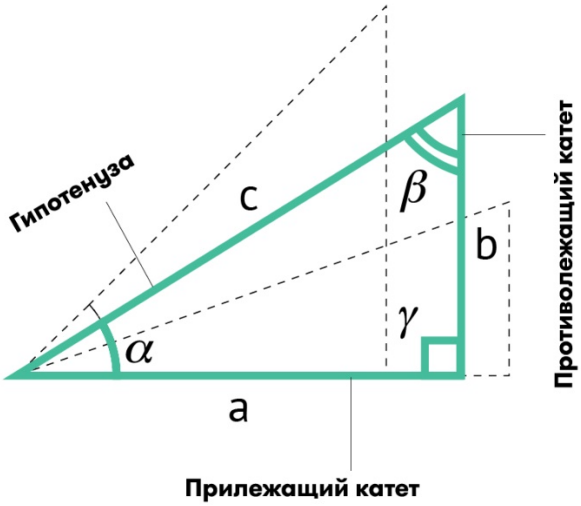

Рисунок 2 – Прямоугольный треугольник со сторонами a,b,c

Необходимость данных манипуляций объясняется следующим: студенты возвращаются к истокам зарождения понятия «тригонометрия», восстанавливается понимания неотрывной связи данного термина и треугольника. Расчеты соотношений между сторонами прямоугольного треугольника и являлось первоначальным предназначением тригонометрии.

Понятие синуса угла определяется через соотношение сторон прямоугольного треугольника. Если у студента сформировано понятие о том, как именно изменяется треугольник по мере измерения угла, то имеется понимание изменения и синуса данного угла.

Знакомство с элементарными понятиями тригонометрии следует закончить с введения понятия sinи cos.

- **Синусом угла α называется отношение противолежащего катета (со стороны b) к гипотенузе (сторона c). То есть sinα= b/c.**
- **Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета (сторона a) к гипотенузе (сторона c). То естьcosα= a/c.**

Студентам необходимо самостоятельно представить sinαи cosαу треугольников, имеющих следующие стороны:

1. a=4 , b=2 , c=8;
2. a=6 , b=10 , c=16;
3. a=3 , b=5 , c=10;
4. a=4 , b=3 , c=11;
5. a=8 , b=15 , c=27;
6. a=24, b=18, c=34.

При возникновении проблем с решением поставленной задачи, необходимо индивидуально проработать ошибки, внимательно проработав понятия «прилежащего» и «противолежащих» катетов, так как зачастую затруднения возникают на данном этапе.

При верном решении поставленной задачи, можно переходить к более глубокому изучению тригонометрии.

2 Раскрытие понятия «тригонометрической окружности»

Тригонометрическая окружность (единичная окружность) – это окружность с радиусом, равным единице, и центром в начале прямоугольной декартовой системы координат.

Очевидно, что представленное выше определение не даст никакого понимания о тригонометрической окружности. Именно по этой причине лучше всего провести мысленный эксперимент. Следует предложить обучающимся представить поездку на колесе обозрения (рисунок 3).

Задача формулируется следующим образом: «Вы движетесь на колесе обозрения, которое вращается против часовой стрелки. Каким образом будет изменяться Ваша высота над землей?»

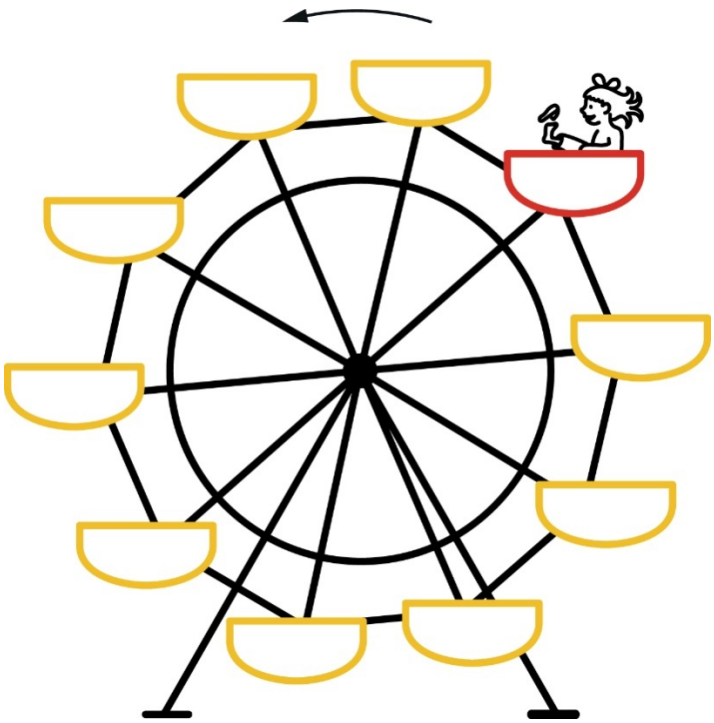

Рисунок 3 – Колесо обозрения (тригонометрическая окружность)

Для выяснения высоты над уровнем земли возьмем с собой GPS-приемник, который и будет замерять положение в пространстве, как в момент подъема кабинки, так и при ее спуске. Казалось бы, маршрут

постоянно идет по окружности, соответственно, карта движения тоже должна представлять собой окружность. Только вот рисунок получится совсем иным.

Здесь у студента проходит ознакомление с понятием «синусоида», она представлена на рисунке 4.

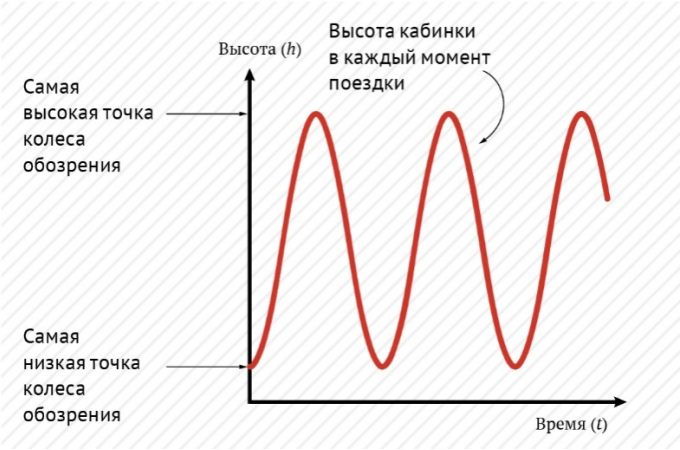

Рисунок 4 – Синусоида

Синусоида помогает описать повторяющееся движения. На чертеже видны моменты подъема и спуска кабинки со студентом в течение времени. Таким образом выстаивается прочная связь между окружностью и волной.

Далее следует вновь вернуться к колесу обозрения. Смоделируем следующую ситуацию: «В процессе движения колесо обозрения застревает на определенной высоте над землей. В этот момент кабинка находится под конкретным углом к земле, равным a».

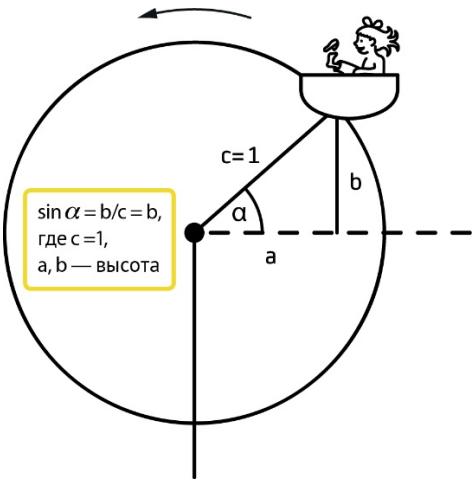

Рисунок 5 – Колесо обозрения

Необходимо обратить внимание студентов на три точки: кабинка, центр окружности и проекцию кабинки. Они образуют прямоугольный треугольник, где гипотенуза является радиусом колеса (предположим, что он равен единице).

Тогда синус угла α показывает высоту кабинки над центром колеса. Допустим, катающемуся повезло и спустя пару минут колесо обозрения вновь заработало. По мере движения угол α увеличивается и в конце концов, когда кабинка будет проходить наивысшую точку, он перевалит за 90°. С этого момента уже нельзя говорить, что угол α «принадлежит» нашему правому треугольнику. Ничего страшного. Математики уже давно расширили определение функции синуса, которое разрешает использовать любое значение угла α.

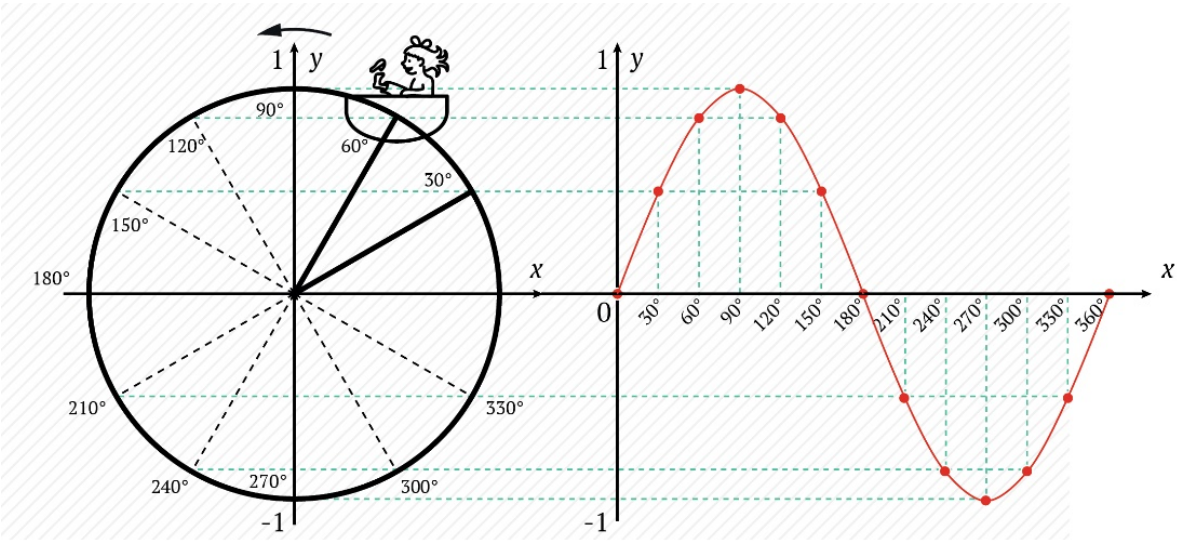

Рисунок 6 – Связь движения кабинки и синусоиды

В нашем случае эта функция будет показывать высоту кабинки относительно центра колеса, а график синусоиды как раз показывает высоту по мере увеличения угла α. Угол даже может быть отрицательным, если колесо внезапно начнет вращаться в обратную сторону. И синусоида

повторяет себя, каждые 360°, точно также, как и вы будете оказываться на одном и том же месте, совершая все новые и новые обороты.

3 Язык тригонометрии: как решать тригонометрические неравенства

Следующим этапом знакомства с понятием тригонометрии является демонстрация тригонометрического неравенства, представленного на рисунке 7. Очевидно, что первичное ознакомление вызовет у студентов массу негативных эмоций, так как подобное выражение выглядит сложно.

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \geq -\frac{1}{2}$$

Рисунок 7 – Тригонометрическое неравенство

Следом рекомендуется сразу продемонстрировать ответ (рисунок 8) на неравенство, представленное на рисунке 7. Можно будет сразу отметить, что ответ представляет собой интервал, ограниченный с двух сторон.

$$\left[\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{17}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n \ , n \in Z \right]$$

Рисунок 8 – Ответ на тригонометрическое неравенство

Рекомендуется уделить особенное внимание ответу, представленному на рисунке 8. Следует задать аудитории ряд вопросов, а конкретнее:

- Что обозначают квадратные скобки? Какие еще скобки бывают?
- Что означает надпись n€Z? Какие еще числа входят в указанное множество?
- Почему везде прибавляется πn?

Первая пара вопросов не должна вызвать никаких затруднений. Если же студенты не смогли сформулировать правильный ответ, то необходимо

сделать «шаг назад», а конкретнее: повторить тему «Натуральные, целые, рациональные числа» и еще тему: «Интервалы». Только в тех случаях, когда данные темы не вызывают затруднений, можно акцентировать внимание на третьем вопросе.

Именно здесь студенты должны самостоятельно прийти к выводу о том, что данный фактор демонстрирует цикличность функции. Необходимо установить очевидную и крепкую связь между графической демонстрацией и итоговой записью.

Далее следует предложить последовательный разбор задачи. Первостепенно отбросим все сложные детали. Говоря конкретнее: пока забудем про то, что заключено в скобках и заменим $(3x - \pi/4)$ на α. Забудем про знак "≥" и решим вначале такое равенство.

$$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

Рисунок 9 – Синус α равен −1/2

Итак, синус α равен −1/2. Что это значит в контексте выстроенного ранее мысленного эксперимента с колесом обозрения?

Это значит, что высота кабинки у колеса должна быть − 1/2 относительно центра колеса. То есть, пассажиры должны быть ниже центра колеса на 1/2. Отсюда следует, что нужно найти угол , при котором кабинка зависнет на такой высоте.

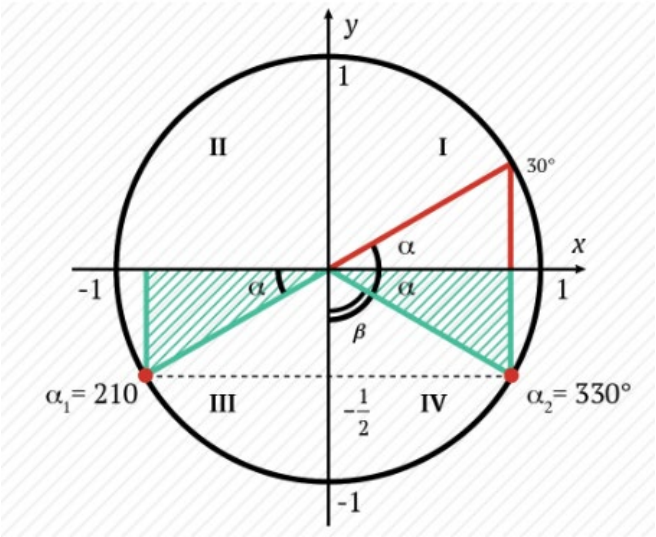

Рисунок 10 – Тригонометрическая окружность неравенства

На колесе есть две точки, где кабинка будет находиться на нужной высоте (две красные точки на рисунке 10). Следовательно, существует два нужных нам угла α1 и α2.

Следует обратить отдельное внимание на два прямоугольных треугольника, выделенных зелёным цветом. Они одинаковые, так как являются зеркальным отображением друг друга. Предложите студентам так же зеркально отобразить правый треугольник, но уже «вверх».

Полученный треугольник, выделенный красным цветом на рисунке 10, имеет гипотенузу равную 1 (радиус колеса) и противолежащий катет (высота над центром) равный 1/2. В силу того, что все три треугольника одинаковые, они имеют одинаковые острые углы.

Необходимо найти острый угол красного треугольника, при котором его синус равен 1/2. Поступим также, как древние астрономы, и заглянем в таблицу значений синуса для различных углов. Итак, sin α = 1/2 при = 30°. Интуитивно понятно, что наши три угла и значения их синусов связаны. Но как?

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$

Рисунок 11 – Формулы приведения

Известно, что полный круг составляет 360°. Разделим его на четыре четверти по 90° и пронумеруем их, как показано на рисунке 12.

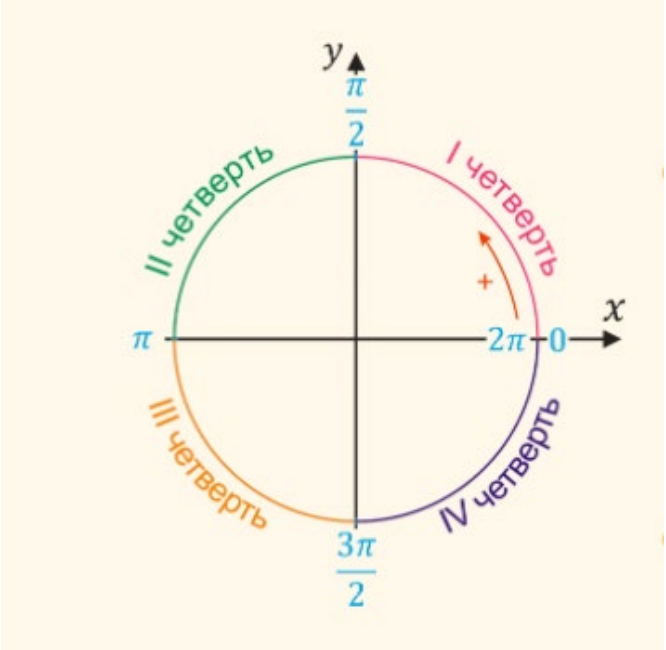

Рисунок 12 – Тригонометрическая окружность по четвертям

Первая точка находится в третьей четверти. Так как две четверти в общем дают 180°, а угол α = 30°, то искомый угол α1 = 210°. Нашли первый угол. Вторая точка находится в четвертой четверти. Три четверти в общем

дают 270°, но прибавлением 30° тут не отделаешься, так как нужно прибавить угол β, а не угол α. Так как угол

$$\alpha + \beta = 90°,$$

то угол

$$\beta = 90° - 30° = 60°.$$

И второй искомый угол равен

$$270° + 60° = 330°.$$

Остался один маленький нюанс. Необходимо напомнить о том, что говорилось ранее, а именно: тригонометрические функции описывают повторяющиеся процессы. Отсюда можно сделать вывод о том, что если воображаемое колесо не остановится после того, как совершит полный оборот в 360°, то с каждым новым оборотом кабина с пассажиром будет проходить через две точки, находящиеся на уровне –1/2.

Эти точки определяются простым прибавлением 360° к найденным нами углам. При этом n – любое целое число, то есть, на нашем примере это количество оборотов колеса.

$$\alpha_1 = 210° + 360°n, n \in Z$$
$$\alpha_2 = 330° + 360°n, n \in Z$$

Стоит заметить, что число n может быть и отрицательным, если колесо крутится в обратную сторону. Равенстnosin α=−1/2 решено.

Далее следует перейти к неравенству sin α ≥ −1/2. Если для решения равенства мы нашли значения углов, при которых наша высота над центром колеса равна −1/2, то для решения неравенства нам нужно найти все углы, при которых наша высота больше либо равна −1/2. Помните мы говорили о том, что угол может быть отрицательным? Сейчас нам это пригодится. Определим угол α2 не как 330°, а как −30° (330°−360°). На рисунке 13 эта область выделена зелёным цветом.

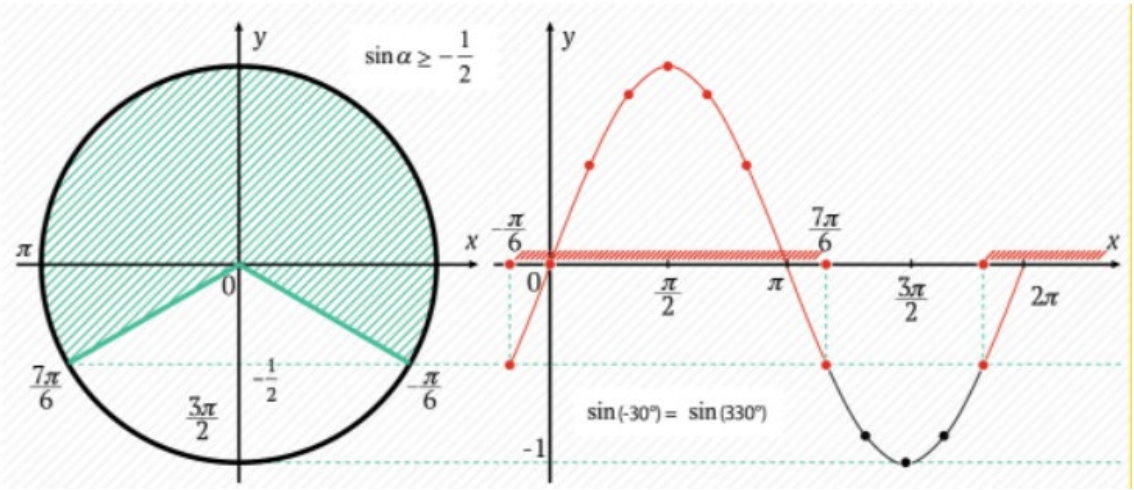

Рисунок 13 – Соответствие графика и окружности

Для того, чтобы правильно записать решение неравенства, обратите внимание на рисунок синусоиды и прямой y=−1/2(высота). Нас интересуют области синусоиды, которые выше прямой y=−1/2. На рисунке они заштрихованы красным цветом. Обратите внимание на точки, которые выделяют эти отрезки. Это те же точки, которые мы получили при решении равенства sin α=−1/2 и они повторяются каждые 360°. Ответ можно записать так:

$$-30^\circ + 360^\circ n \le \alpha \le 210^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

Дело осталось за малым. Во-первых, вспомнить, что математики обозначают 180° как π, когда записывают формулы с углами, и переписать решение так:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le \alpha \le \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, n \in Z$$

Во-вторых, произвести обратную замену α на 3x − π/4.

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 3x - \frac{\pi}{4} \le \frac{7}{6}\pi + 2\pi n, n \in Z$$

Путём нехитрых алгебраических преобразований, а именно прибавления π/4 и деления на 3 ко всем частям неравенства, получаем:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2\pi n \le 3x \le \frac{\pi}{4}+\frac{7}{6}\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$\frac{\pi}{12}+2\pi n \le 3x \le \frac{17}{12}\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$\frac{\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n \le x \le \frac{17}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z$$

Ответ:

$$\left[\ \frac{\pi}{36}+\frac{2}{3}\pi n; \frac{17}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n\ \ , n\in Z\ \right]$$

3.1 Задачи для самостоятельного решения

Необходимо предложить студентам самостоятельно решить ряд задач у доски. Разумеется, в процессе решения лучше всего помогать каждому выступающему, подсказывая верное направление. Достаточно решить четыре элементарные задачи для отработки метода.

1. $\cos x \le \frac{1}{2}$

2. $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\sin^2 x > \frac{1}{4}$

4. $\tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

В процессе решения рекомендуется использовать не только тригонометрическую окружность, но и графики функций. Таким образом студенты смогут запомнить факт периодичности функции, а также понять основной принцип ее «действия».

Можно разрешить использование таблицы значений тригонометрических функций, так как особую важность в данном случае имеет не знание таблицы, а умение правильно записывать ответ

тригонометрического неравенства, а также способность демонстрации поведения каждой отдельной функции.

4 Формулы приведения: как научиться определять ответ без таблицы

Зачастую принято считать, что для удачного применения формул приведения достаточно ознакомиться с их значениями и выучить. Очевидно, что таблица, представленная на рисунке 14, вызовет массу опасений со стороны студентов.

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(360^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(360^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

Рисунок 14 – Формулы приведения

Существует более простой и очевидный метод запоминания всех закономерностей тригонометрии, а конкретнее – работы с формулами приведения. Обучение данному методу следует разделить на несколько этапов.

Но для начала следует ознакомиться с тем, что вообще называется формулой приведения. На самом деле, они имеются схожий вид, представленный на рисунке 15.

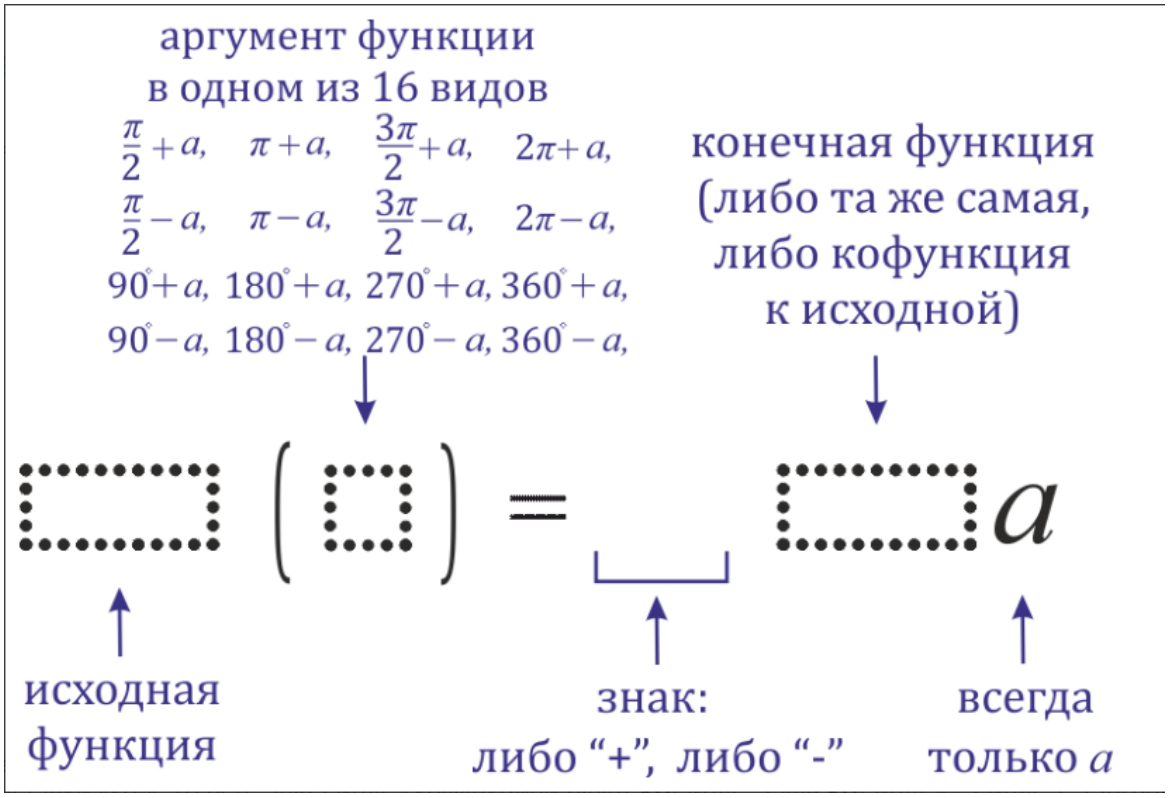

Рисунок 15 – «Строение» формулы приведения

Здесь нужно пояснить термин «кофункция» - это та же самая функция с добавлением или убиранием приставки «ко-». То есть, для синуса кофункцией будет косинус, а для косинуса – синус. С тангенсом и котангенсом – аналогично.

Функция:		Кофункция:
$\sin a$	$\rightarrow$	$\cos a$
$\cos a$	$\rightarrow$	$\sin a$
$tg\ a$	$\rightarrow$	$ctg\ a$
$ctg\ a$	$\rightarrow$	$tg\ a$

Таким образом, например, синус при применении этих формул никогда не поменяется на тангенс или котангенс, он либо останется синусом, либо превратиться в косинус. А котангенс никогда не станет синусом или косинусом, он либо останется котангенсом, либо станет тангенсом. И так далее.

Едем дальше. Так как исходная функция и ее аргумент нам обычно даны, то весь вывод нужной формулы сводится к двум вопросам:

- как определить знак перед конечной функцией (плюс или минус)?
- как определить меняется ли функция на кофункцию или нет?

4.1 Как определить знак перед конечной функцией?

Следует запомнить крайне простое правило: **какой знак был у исходной функции в исходной четверти, такой знак и нужно ставить перед конечной функцией**.

Например, выводим формулу приведения для$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cdots$.С исходной функцией понятно – косинус, а исходная четверть?Для того, чтобы ответить на этот вопрос, представим, что α – это угол от 0 до $\frac{\pi}{2}$, т.е. лежит в пределах от 0° до 90° (хотя это может быть не так, но для определения знака данная условность необходима).В какой четверти тригонометрической окружности при таком условии будет находиться точка, обозначающая угол$\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$?

Чтобы ответить на вопрос, надо от точки, обозначающей$\frac{3\pi}{2}$повернуть в отрицательную сторону на угол α, как показано на рисунке 16.

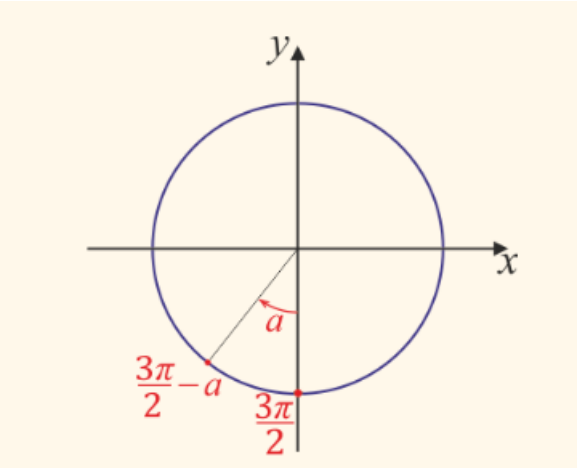

Рисунок 16 – Графическое представление угла $\frac{3\pi}{2} - \alpha$

В какой четверти мы окажемся? В третьей. А какой же знак имеет косинус в третьей четверти? Минус. Поэтому перед итоговой функцией будет стоят минус:$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = - \cdots$.

Рекомендуется отработать дополнительно навык определения четвертей и знаков функций. Предлагайте студентам различные углы, представленные в виде суммы или разности.

Также рекомендуется начертить окружности, представленные на рисунке 17. Даже если ранее тема проходилась – повторение не является проблемой. Лучше, чтобы у студентов всегда было под рукой данное изображение. По крайней мере первое время.

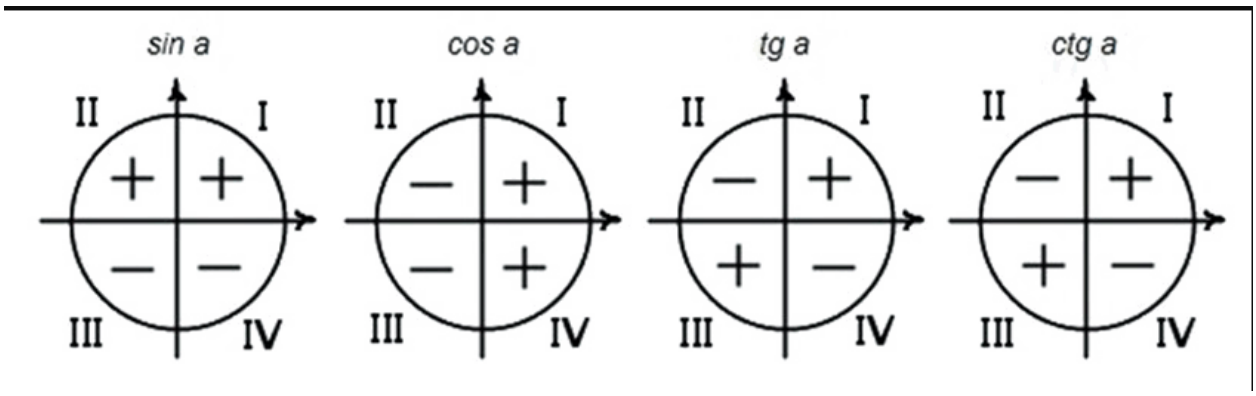

Рисунок 17 – Знаки тригонометрических функций

4.2 Как определить меняется ли функция на кофункцию?

В данном случае правило еще проще для запоминания, чем предыдущее.

- Если «точка привязки» $\frac{\pi}{2}$ (90°)или $\frac{3\pi}{2}$ (270°), то функция МЕНЯЕТСЯ на кофункцию.

-Если «точка привязки» π (180°) или 2π (360°), то функция НЕ МЕНЯЕТСЯ на кофункцию.

То есть, при аргументах исходной функции $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, мы должны поменять функцию, а при аргументах π + α, π - α, 2π + α,2π – α –нет. Для того, чтоб это легче запомнить, вы можете воспользоваться мнемоническим правилом, которое в школе называют «лошадиным правилом»:

Точки, обозначающие $\frac{\pi}{2}$ (90°)или $\frac{3\pi}{2}$ (270°), расположены вертикально, и если вы переводите взгляд с одной на другую и назад, вы киваете головой, как бы говоря «да».

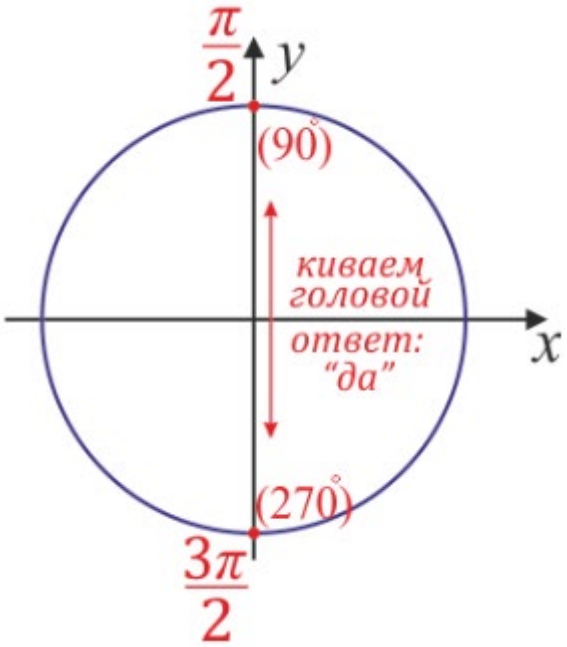

Рисунок 18 – Мнемоническое правило

Точки же, обозначающие π (180°) или 2π (360°), расположены горизонтально, и если вы переводите взгляд между ними, вы мотаете головой, как бы говоря «нет».

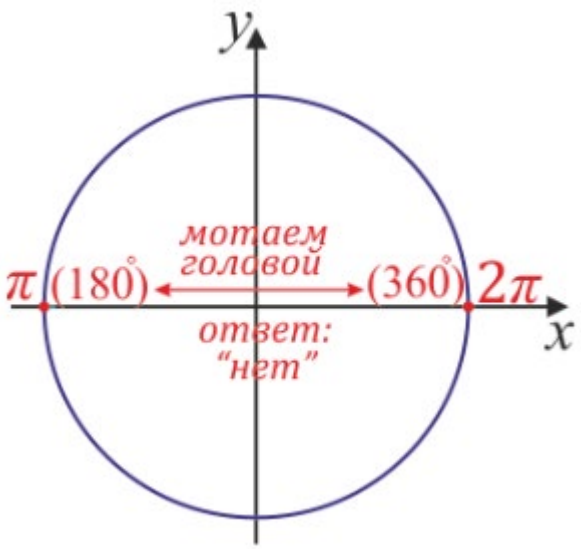

Рисунок 19 – Мнемоническое правило

Эти «да» и «нет» - и есть ответ на вопрос: «меняется ли функция?».

Таким образом, согласно правилу, в нашем примере выше, а конкретнее: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cdots$косинус будет меняться на синус. В конечном итоге получаем,$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$. Это и есть верная формула приведения.

Далее рекомендуется произвести отработку полученных навыков. Для этого лучше использовать таблицу формул приведения, представленную ранее, на рисунке 14.

Демонстрация данной таблицы и тренировка навыков позволит установить у студента четкую логическую цепочку: не обязательно учить формулы, если умеешь их выводить. Соответственно, данный подход позволяет пробудить дополнительный интерес к изучению.

Список рекомендованной литературы

1. Аджиева А. Тригонометрические уравнения // Математика. Приложение к газете «Первое сентября» № 33, 2001г.

2. Адрова И.А., Ромашко И.В. Модульный урок в X классе по теме «Решение тригонометрических уравнений» //Математика в школе. 2001. №4. С. 28-32.

3. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. №6

4. Филатов В.Г. О потере корней при решении тригонометрических уравнений //Математика в школе. 1991. №2. С.57-59.

5. Шабашова О.В. Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях //Математика в школе. 2004. №1. С.20-24.